SEMESTRAL

UNI

academiacesarvallejo.edu.pe

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

SEMESTRAL

UNI





Álgebra

Tema: Ecuaciones polinomiales I

Docente: Segundo Heli Chiroque Reyes

ECUACIÓN

Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones matemáticas, donde esta presente al menos una variable (incógnita).

Ejemplos:

- $21x^2 - 13x + 2 = 0$
- $\log_x(2x^2 - 7x + 12) = 2$
- $\frac{3}{1+x+x^2} = 3 - x - x^2$

Nota. Resolver una ec. significa hallar su C.S.

Teorema

Si $a \cdot b = 0 \leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$

Ejemplo: Si $(3x-2)(x+4) = 0$

$\longrightarrow \quad 3x - 2 = 0 \quad \vee \quad x + 4 = 0$

$\longrightarrow \quad x = \frac{2}{3} \quad \vee \quad x = -4$

Solución de una ecuación

Es el valor que toma la variable (incógnita) y verifica la ecuación.

Conjunto solución (CS)

Es el conjunto formado por todas las soluciones de una ecuación.

Ejemplo

Dada la ecuación $(x+1)(x^2 - 38x + 105) = 0$

Factorizamos $(x+1)(x-3)(x-35) = 0$

$\longrightarrow x+1 = 0 \quad \vee \quad x-3 = 0 \quad \vee \quad x-35 = 0$

$\longrightarrow x = -1 \quad \vee \quad x = 3 \quad \vee \quad x = 35$

son soluciones de la ecuación

Luego, $CS = \{-1\,;3\,;35\}$

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

ECUACIÓN POLINOMIAL

Es aquella ecuación que presenta la siguiente forma general

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots a_{n-1}x + a_n = 0$$

Donde $n \in \mathbb{Z}_0^+$, x es la incógnita y

$a_0;\ a_1;\ a_2;\ \ldots;\ a_n$ son los coeficientes $(a_0 \neq 0)$

RAÍZ DE UN POLINOMIO

Dado un polinomio $P_{(x)}$ no constante, diremos que α es una raíz del polinomio $P_{(x)}$ si y solo si $P_{(\alpha)} = 0$.

$5 \rightarrow (x-5)$

$2 \rightarrow (x-2)$

$-8 \rightarrow (x+8)$

Ejemplos:

❖ Sea $P_{(x)} = 3x - 21$

7 es raíz del polinomio, pues: $P_{(7)} = 0$

❖ $P_{(x)} = 3(2-x)(x+5)$

Se observa que:

2 es raíz de $P_{(x)}$, pues: $P_{(2)} = 0$

-5 es raíz de $P_{(x)}$, pues: $P_{(-5)} = 0$

Teorema del factor

α es raíz de $P_{(x)} \leftrightarrow (x-\alpha)$ es factor de $P_{(x)}$

Es decir, si $(x-\alpha)$ es factor de $P_{(x)}$, existe un polinomio $Q_{(x)}$ tal que: $P_{(x)} = (x-\alpha)\cdot Q(x)$

Ejemplo:

❖ Si -6 es raíz de $P_{(x)}$

→ $(x-(-6))$ es factor de $P_{(x)}$

→ existe $Q(x)$ tal que: $P_{(x)} = (x+6)\cdot Q(x)$

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

RAÍZ DE MULTIPLICIDAD k

Sea $P_{(x)}$ un polinomio de grado $n \geq 1$

Diremos que α es una raíz de multiplicidad k del polinomio $P_{(x)}$ si y solo si $(x - \alpha)^k$ es un factor de $P_{(x)}$.

Es decir: $P_{(x)} = (x - \alpha)^k \cdot Q_{(x)}$; $Q_{(\alpha)} \neq 0$.

Si $k = 1$, diremos que α es raíz simple .

Ejemplo: Dado el polinomio

$$P_{(x)} = (x - 4)(x - 3)^2(x - 2)^3$$

Sus raíces son:

4 ;	3 ; 3	; 2 ; 2 ; 2
Raíz simple	Raíz de multiplicidad dos o raíz doble	Raíz de multiplicidad tres o raíz triple

Teorema fundamental del álgebra

Todo polinomio de grado $n \geq 1$, con coeficientes complejos, posee al menos una raíz compleja.

Corolario

Todo polinomio de grado $n \geq 1$, tiene exactamente n raíces (contadas con la multiplicidad).

Ejemplos

- $R(x) = 7x^2 - 6x - 1$, tiene 2 raíces
- $Q(x) = x^3 - 12x + 11$, tiene 3 raíces

* $M(x) = (x^2 + 1)^3 (x + 2)^2 x^1$

Grado = 2(3) + 2 + 1 = 9 → 9 raíces

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

Aplicación

Dado el polinomio $P_{(x)} = x^3 + ax^2 + bx + c$. Si 2 y 3 son raíces de $P_{(x)}$, además $P_{(4)} = 16$.

Determine el valor de $a + b + c$.

A) 13   B) 9   C) 5   D) 12   E) 20

Resolución

Sea : 2; 3; 4 son las raíces

Luego: P(x) = 1(x−2)(x−3)(x

x=4 : P(4) = (2)(+1)(4−4) = 16

4 = −4

Pero también

P(x) = (x−2)(x−3)(x+4) = x³ + ax² + bx + c

x=1: P(1) = (−1)(−2)(5) = 1 + a + b + c

9 = a + b + c

ECUACIÓN CUADRÁTICA

Su forma general es:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad ; \{a, b, c\} \subset \mathbb{C}, a \neq 0$$

Toda ecuación cuadrática tiene 2 raíces

Fórmula general

Las dos raíces de la ecuación

$$ax^2 + bx + c = 0; \quad a \neq 0$$

son:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad ; \quad x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Donde:

$\Delta = b^2 - 4ac$, es el **discriminante**

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

Ejemplo: Resuelva la ecuación

$$2x^2 - 2(1+i)x + i = 0\ ; \qquad i = \sqrt{-1}$$

Resolución

$$\Delta = (-2(1+i))^2 - 4(2)(i)$$

$$\Delta = 0$$

Reemplazamos en la fórmula general

$$x_1 = \frac{-(-2(1+i)) + \sqrt{0}}{2(2)}\ ;\ x_2 = \frac{-(-2(1+i)) - \sqrt{0}}{2(2)}$$

$$x_1 = \frac{1+i}{2}\ ;\ x_2 = \frac{1+i}{2}$$

$$\therefore\ CS = \left\{\frac{1+i}{2}\right\}$$

Naturaleza de las raíces

$$ax^2 + bx + c = 0\ ; \qquad a \neq 0\ , \{a; b; c\} \subset \mathbb{R}$$

$\Delta > 0$	Raíces reales diferentes
$\Delta = 0$	Raíces reales e iguales (única solución)
$\Delta < 0$	Raíces imaginarias y conjugadas

Aplicación

Para qué valores de a en la ecuación cuadrática:

$$x^2 - 3x + a - 4 = 0$$

tiene raíces reales

Resolución

Tiene raíces reales : $\Delta \geq 0$

$$(-3)^2 - 4(1)(a-4) \geq 0$$

$$9 - 4a + 16 \geq 0$$

$$25 \geq 4a$$

$$\frac{25}{4} \geq a$$

$\therefore\ a \in \left\langle -\infty; \frac{25}{4} \right]$

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

TEOREMAS DE CARDANO - VIETTE

Sean x_1 y x_2 raíces de la ecuación cuadrática

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Se cumple:

$$\boldsymbol{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}}$$

Suma de raíces

$$\boldsymbol{x_1 . x_2 = \frac{c}{a}}$$

Producto de raíces

NOTA

$$\boldsymbol{(x_1 + x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 = 4x_1x_2}$$

Aplicación

Dada la ecuación $2x^2 + mx + 30 = 0$ y x_1 y x_2 sus raíces, indique el menor valor de m se cumple la relación $\frac{x_1}{x_2} = \frac{5}{3}$.

A) -8 B) -4 C) -20 D) -16 E) -1

Resolución

$\frac{x_1}{x_2} = \frac{5}{3} \Rightarrow x_1 = 5k$, $x_2 = 3k$

• Suma raíces $= 5k + 3k = -\frac{m}{2} \Rightarrow m = -16k$

• $k = 1 \Rightarrow m = -16$

• $k = -1 \Rightarrow m = 16$

• Prod. raíces $= (5k)(3k) = 15$

$15k^2 = 15$

$k^2 = 1$

$k = \pm 1$

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

Aplicación

Dada la ecuación cuadrática

$$cx^2 + bx + a = 0$$

De raíces x_1 y x_2 tal que $x_1 - x_2 = 1$, encuentre una relación entre a, b y c.

A) $b + c^2 = 4ac$ B) $b - c = 4ac$ C) $b^2 - 4ac = c^2$

D) $c^2 - b^2 = 4ac$ E) $a^2 - b = 4ab$

Resolución

Dato: $cx^2+bx+a=0$; $x_1 - x_2 = 1$

• $x_1+x_2 = -\frac{b}{c}$ • $x_1 . x_2 = \frac{a}{c}$

Por. Legendre:

$(x_1+x_2)^2 - (x_1-x_2)^2 = 4x_1x_2$

$\left(-\frac{b}{c}\right)^2 - (1)^2 = 4\left(\frac{a}{c}\right)$

c^2

$b^2 - c^2 = 4ac$

$b^2 - 4ac = c^2$

Aplicación

Si el conjunto solución de la ecuación cuadrática.

$$x^2 + px + q = 0$$

es $\{\Delta + 2; \Delta + 3\}$ (raíces), además tiene raíces positivas. Determine el valor de $p + q$.

A) 7 B) 83/4 C) 21 D) 55/4 E) 5

Resolución

La ec. de raíces $(\Delta+2)$ y $(\Delta+3)$

$\rightarrow P(x) = x^2 - (2\Delta+5)x + (\Delta+2)(\Delta+3)$

Discriminante: $\Delta = [-(2\Delta+5)]^2 - 4(1)(\Delta+2)(\Delta+3)$

$\Delta = 1$

reemp: $P(x) = x^2 - 7x + 12 = x^2+px+q$

$\rightarrow p = -7 ; q = 12$

$\therefore p+q = 5$

Recordar:

La ecuación de raíces α y β

$x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta = 0$

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

DEFINICIONES

Sean x_1 y x_2 las raíces de $ax^2 + bx + c = 0\,, a \neq 0.$

Diremos que la ecuación tiene:

Raíces simétricas, si $x_1 + x_2 = 0$

Raíces recíprocas, si $x_1 . x_2 = 1$

Teorema (ecuaciones equivalentes)

Si las ecuaciones cuadráticas

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad abc \neq 0 \quad y$$
$$mx^2 + nx + p = 0, \quad mnp \neq 0$$

son equivalentes **(tienen las mismas soluciones)**

Se cumple: $\dfrac{a}{m} = \dfrac{b}{n} = \dfrac{c}{p}$

Aplicación

Si las ecuaciones de incógnita x

$$(6m - 2)x^2 - 5mx + 1 = 0,$$
$$8x^2 - (4n + 2)x - 2 = 0$$

son equivalentes, halle el valor de $m + n$.

A) 7 B) 5 C) 10 D) 3 E) 2

Resolución

Se cumple:

$$\frac{6m-2}{8} = \frac{-5m}{-(4n+2)} = -\frac{1}{2}$$

$$* \ \frac{6m-2}{8} = -\frac{1}{2} \Rightarrow m = -1/3$$

$$* \ \frac{5m}{4n+2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow n =$$

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

ECUACIÓN BICUADRADA

Es aquella ecuación de cuarto grado, que tiene la siguiente forma general:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0, \quad abc \neq 0$$

Ejemplo

Resuelva la ecuación $x^4 - 7x^2 - 144 = 0$

Resolución

$x^4 - 7x^2 - 144 = 0$

$x^2 \quad -16$

$x^2 \quad 9$

$* \; x^2 - (3i)^2 = x^2 + 9$

$(x^2 - 16)(x^2 + 9) = 0$

$(x-4)(x+4)(x+3i)(x-3i) = 0$

Sol: $4; -4; -3i; 3i$

$C.S. = \{4; -4; 3i; -3i\}$

PROPIEDADES

Dada la ecuación bicuadrada:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

- Sus raíces tienen la forma: $\alpha\,;-\alpha\,;\beta\,;-\beta$
- $\alpha^2 + \beta^2 = -\dfrac{b}{a}$ $\qquad \alpha^2 \cdot \beta^2 = \dfrac{c}{a}$
- Si sus raíces están en P.A. estas tienen la forma

$$-3k\,,-k\,,k\,,3k\,; \quad \text{razón} = 2k$$

- Si $b^2 - 4ac < 0$, entonces las raíces de la ecuación son de la forma:

$$m + ni, \quad m - ni, \quad -m - ni, \quad -m + ni$$

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

Aplicación

Si la ecuación bicuadrada

$$x^4 - 30\,x^2 + (m+1)^2 = 0$$

tiene raíces en P.A. . Calcule la suma de valores de m.

A) 2 B) 8 C) − 2 D) 10 E) 0

Resolución

Como las raíces están en PA : $-3k; -k; k; 3k$

• $\alpha^2+\beta^2 = -\frac{b}{a}$

$k^2 + (3k)^2 = 30$, $(3k)^2 = 9k^2$

$10k^2 = 30$

$k^2 = 3$

• $\alpha^2 \cdot \beta^2 = \frac{c}{a}$

$k^2 \cdot (3k)^2 = (m+1)^2$

$9k^2 \cdot k^2 = (m+1)^2$

$9(3)(3) = (m+1)^2$

$9^2 = (m+1)^2$

→ $m+1 = 9 \rightarrow m = 8$

→ $m+1 = -9 \rightarrow m = -10$

Suma: -2

Aplicación

Dada la ecuación bicuadrada de incógnita x.

$$x^4 - (a+4)x^2 + 4a = 0$$

Halle el valor de a para que la suma de raíces positivas sea 4.

A) 36 B) − 4 C) 6 D) 4 E) 9

Resolución

Obs.

La Ec. bicuadrada de raíces $\alpha; \beta$

→ $x^4 - (\alpha^2+\beta^2)x^2 + \alpha^2\beta^2 = 0$

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

ACADEMIA
CÉSAR VALLEJO

GRACIAS

SÍGUENOS:

academiacesarvallejo.edu.pe